Übungsstunde 11

Plan für letze Woche

- Fragen/Tipps zur Klausur und Klausurvorbereitung
- Alte Prüfung zusammen durchgehen
- Bestimmtes Thema/Aufgabe nochmal anschauen
- …

Nachbesprechung Bonus

- Top!
- Passt auf mit $=$ und $\equiv_{x^3+2x^2+1}$
- Begründungen angeben!

10.5 Extension Fields ($\star$) *(8 Points)*

Let $F = \mathbb{Z}_3[x]_{x^3+2x^2+1}$.

a) Prove that F is a field.

b) Find a generator of F^*. **Show your work.**

c) Find all roots of $a(y) = y^2 + 2y(x^2 + x) + (x^2 + 2)$ in $F[y]$. **Show your work.**

Beweissysteme

Beweissystem: $\Pi = (S, P, \tau, \phi)$

- S: Aussagen
- P: Beweise
- $\tau: S \to \{0,1\}$, Wahrheitsfunktion ($\tau(s) = 1$ heisst s ist wahr)
- $\phi: S \times P \to \{0,1\}$, Verifikationsfunktion ($\phi(s,p) = 1$ heisst p ist gültiger Beweis für Aussage s)

Beweissysteme

- **Sound:** Es existiert kein Beweis für eine falsche Aussage

  Soundness zeigen: Für beliebiges $s \in S$ und $p \in P$ mit $\phi(s,p) = 1$ zeigen, dass $\tau(s) = 1$

  Oder für beliebiges $s \in S$ mit $\tau(s) = 0$ zeigen, dass $\phi(s,p) = 0$ für alle $p \in P$

- **Complete:** Für jede korrekte Aussage gibt es einen gültigen Beweis

  Completness zeigen: Für beliebiges $s \in S$ mit $\tau(s) = 1$ zeigen, dass $p \in P$ existiert, sodass $\phi(\mathrm{s},\mathrm{p}) = 1$

Aufgabe

11.4 One More Proof System (⋆) ***(8 Points)***

Let $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{P}, \tau, \phi)$ be a proof system. Consider the proof system $\overline{\Sigma} = (\mathcal{S}, \mathcal{P}, \overline{\tau}, \overline{\phi})$, where for all $s \in \mathcal{S}$ and $p \in \mathcal{P}$ we define

$$\begin{aligned} \overline{\tau}(s) = 1 \quad &\iff \quad \tau(s) = 0, \\ \overline{\phi}(s,p) = 1 \quad &\iff \quad \phi(s,p) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Prove or disprove the following statements.

a) If Σ is sound, then $\overline{\Sigma}$ is complete.

b) If Σ is complete, then $\overline{\Sigma}$ is sound.

Kalküle

- Ein Kalkül K ist eine Menge an Regeln, die wir auf eine gegebene Menge von Formeln M anwenden dürfen, um eine neue Menge an Formeln M' herzuleiten. Wir schreiben dann
$$M \vdash_K M'$$
- Ein Kalkül ist **sound,** wenn für alle M, F gilt:
$$M \vdash_K F \Rightarrow M \models F$$
- Ein Kalkül ist **complete,** wenn für alle M, F gilt:
$$M \models F \Rightarrow M \vdash_K F$$

Aufgabe

11.5 A Special Calculus for Propositional Logic (⋆) ***(8 Points)***

Consider the calculus consisting of the following three derivation rules:

$$\begin{aligned} \varnothing &\vdash_{R_1} F \to F \\ \{F\} &\vdash_{R_2} G \to F \\ \{F \to G, F \to (H \to \neg G)\} &\vdash_{R_3} F \to \neg H \end{aligned}$$

a) Formally derive $A \to \neg\neg A$ from $\varnothing$ in the calculus.

Aufgabe

Betrachte folgendes Kalkül:

$$\{F \to G, F\} \vdash_{R1} G$$

$$\emptyset \vdash_{R2} F \to (G \to F)$$

$$\emptyset \vdash_{R3} \big(F \to (G \to H)\big) \to ((F \to G) \to (F \to H))$$

Leite $A \to C$ aus $M = \{A \to B, B \to C\}$ her.

Aufgabe

11.5 A Special Calculus for Propositional Logic ($\star$) ***(8 Points)***

Consider the calculus consisting of the following four derivation rules:

$$\begin{aligned} \{F \to G, F\} &\vdash_{R_1} G \\ \varnothing &\vdash_{R_2} F \to (G \to F) \\ \varnothing &\vdash_{R_3} (\neg F \to \neg G) \to (G \to F) \\ \varnothing &\vdash_{R_4} (F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)) \end{aligned}$$

Formally derive B from $\{A, \neg A\}$ in the calculus.

Interpretationen

- Ein Symbol in einer Formel ist **frei**, wenn wir dem Symbol erst einen Wert zuordnen müssen, bevor wir entscheiden können, ob die Formel wahr oder falsch ist.
- Eine **passende** Interpretation ordnet jedem freien Symbol in einer Formel einen Wert zu
- Eine passende Interpretation $\mathcal{A}$ ist ein **Model** für die Formel F, wenn F unter $\mathcal{A}$ wahr ist

Beispiel

- $A \vee B$
- $(C \rightarrow A) \wedge B$
- $\forall x\ P(x)$
- $\exists y\big(Q(y, y) \wedge P(x)\big) \vee P(y)$